Certified Geometric Computation:

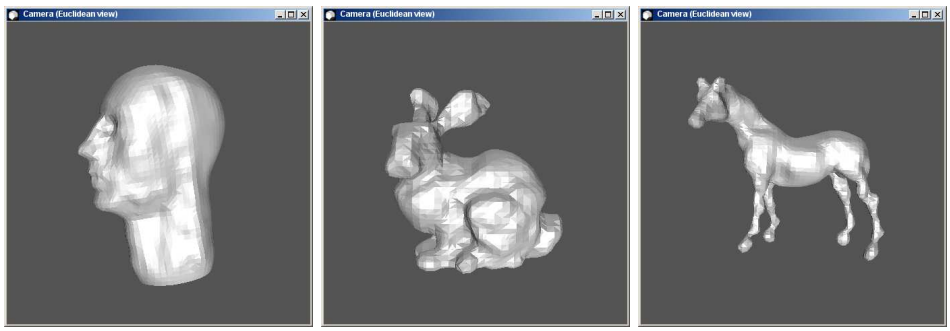
Radial Basis Function based Isosurfaces and Morse-Smale Complexes

Amit Chattopadhyay

Summary

Many shapes arising in applied geometry and topology are curves, surfaces, or, in higher dimensions, smooth manifolds. Such shapes arise as level sets of density functions in large scale data processing, as approximations of a scanned object in shape reconstruction, or as invariant manifolds in dynamical systems. One of the aims of *computational geometry* and *computational topology* is to design general purpose algorithms for computing various geometric and topological properties of manifolds, using a finite precision machine, in a general framework, i.e., abstracting from the specific application context.

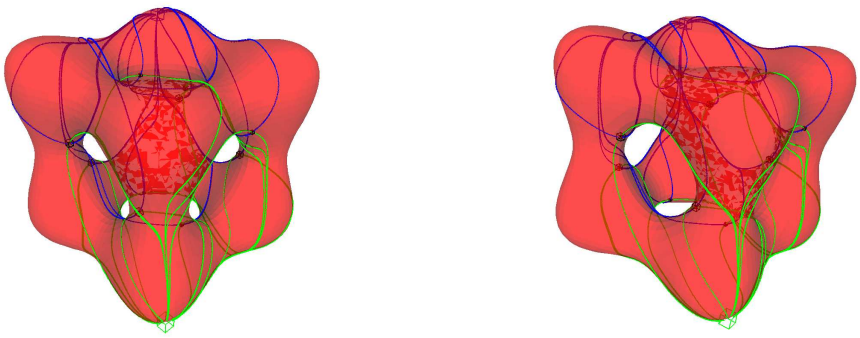
Certified geometric computation, a newly emerging branch of computing science, is a computation paradigm where the main goal is not only numerical accuracy, but above all the geometric and topological correctness of the output. More precisely, in certified geometric computation, the challenge is to develop algorithms for computing topologically correct and geometrically close approximations of implicitly or explicitly given input shapes. The current *thesis* focuses on an important class of problems in computational geometry and topology from the certified computational point of view.



Figuur 1: Some isosurfaces using RBF interpolation method: Head (point-cloud with 1335 points), Bunny (point-cloud with 1326 points), Horse (point-cloud with 1308 points).

The first part of the thesis deals with certified surface reconstruction using the *radial*

basis function (RBF) method, which is being used in *Computer Aided Geometric Design* (CAGD), in visualization, and in medical applications. The surface-reconstruction method using radial basis functions consists of two steps: (i) computing an interpolating implicit function, the zero set of which contains the points in the data set, followed by (ii) extraction of isocurves or isosurfaces. In Figure 3 shows some isosurfaces reconstructed using RBF-method from different point clouds. The second step of the method, that is the extraction of certified isosurfaces from smooth RBF interpolants, has been developed in this research project. We introduce several strategies to improve the performance of a certified meshing algorithm.



Figuur 2: Certified Morse-Smale complex on an implicit tangle-cube, viewed from two different view points. Morse-Smale system consists of 10 saddles (red box), one minimum (green box) and one maximum (blue box). In the pictures, a pair of blue boundary curves contains a certified unstable separatrix (saddle-maximum connection) and a pair of green boundary curves contains a stable separatrix (saddle-minimum connection).

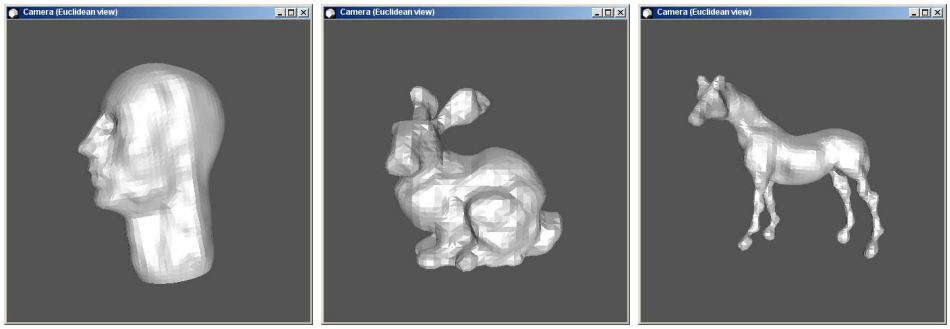
In the second part of the thesis we consider the problem of certified computation of *Morse-Smale* (MS) complexes corresponding to Morse-Smale gradient vector fields defined on bounded planar domains or on implicit surfaces. A Morse-Smale complex is the configuration of singular points and separatrices of a Morse-Smale gradient field. This is a net-like structure on a surface, as in Figure 4, which reveals the global topology of the underlying shape. Thus the Morse-Smale complex is an important tool for the global topological analysis of complex geometrical shapes or data. We consider the problem of computing certified separatrices of a Morse-Smale system connecting a saddle to a source or a sink, and separating attracting regions of sinks, and repelling regions of sources of the gradient field. Computing the Morse-Smale complex can be extremely challenging because of the arbitrarily complex nature of the input data,

whereas available computational resources are limited. We propose new techniques for certified computation of the Morse-Smale complex. Figure 4 shows an example of computed certified Morse-Smale complex corresponding to the height function on a smooth tangle-cube.

The current thesis is a step forward towards the new paradigm of certified geometric computation. We believe the different methods of certified computation, proposed in the thesis, could be extended and generalized for many other problems in this domain.

Samenvatting

Veel vormen die voorkomen in toegepaste meetkunde en topologie zijn krommen, oppervlakken, of meer algemene gladde variëteiten. Dergelijke vormen komen voor als niveauverzamelingen van dichtheidsfuncties in grootschalige data-analyse, als benaderingen van een gescand object in de reconstructie van vormen of als invariante variëteiten van dynamische systemen. Een van de doelstellingen van *Computationele Meetkunde* en *Computationele Topologie* is het ontwerpen van algoritmen voor de berekening van meetkundige en topologische eigenschappen van variëteiten. Deze algoritmen moeten algemeen toepasbaar zijn, dat wil zeggen dat specifieke contexten geabstraheerd worden. Doorgaans worden algoritmen uitgevoerd op apparaten met eindige precisie.

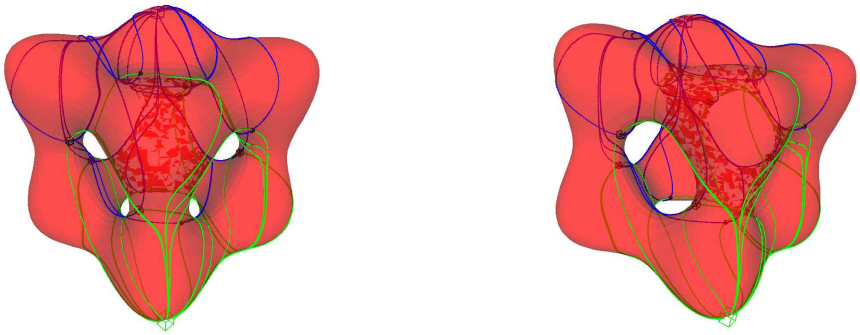


Figuur 3: Enkele niveauoppervlakken gecreëerd met behulp van de RBF interpolatie: Hoofd (puntenwolk met 1335 punten), Konijn (puntenwolk met 1326 punten), Paard (puntenwolk met 1308 punten).

Gecertificeerde Computationele Meetkunde is een nieuwe tak binnen de computationele wetenschappen waarbij niet alleen de numerieke nauwkeurigheid van belang is, maar ook gestreefd wordt naar de meetkundige en topologische correctheid van de uitvoer. De uitdaging is het ontwerpen van algoritmen om voor een gegeven vorm een benadering te berekenen die topologische correct is en in meetkundige zin dichtbij de

impliciet of expliciet gegeven vorm ligt. Dit proefschrift behandelt een belangrijke klasse van problemen binnen de computationele meetkunde en topologie en benadert deze vanuit de gecertificeerde computationele meetkunde.

Het eerste deel van dit proefschrift gaat over gecertificeerde reconstructies van oppervlakken met behulp van radiale basisfuncties (RBF's) welke veel worden gebruikt in ontwerptoepassingen in het bijzonder in het zogenaamde *Computer Aided Geometric Design* (CAGD), visualisatie en medische toepassingen. De reconstructie van een oppervlak met RBF's verloopt in twee stappen: eerst wordt een interpolerende functie berekend waarvan de verzameling van nulpunten de gegeven data bevat en vervolgens worden van deze functie niveaukrommen en -oppervlakken berekend. In figuur 1.3 worden enkele niveauoppervlakken getoond die gereconstrueerd zijn uit verschillende puntenwolken met behulp van RBF's. De tweede stap, het reconstrueren van niveauoppervlakken gebruikmakend van gladde RBF interpolatiefuncties, wordt bestudeerd in dit proefschrift. Wij introduceren verschillende strategieën ter verbetering van een gecertificeerd *Meshing* algoritme.



Figuur 4: Gecertificeerd Morse-Smale complex op een *tangle-cube* vanuit twee verschillende aanzichten. Een Morse-Smale-complex bestaande uit 10 zadelpunten (rood kader), een minimum (groen kader) en een maximum (blauw kader). In het figuur bevat een paar blauwe randkrommen een gecertificeerd unstabiele separatrix (een verbinding tussen zadel en maximum) en een paar groene randkrommen een stabiele separatrix (een verbinding tussen zadel en minimum).

In deel twee van het proefschrift ontwikkelen we gecertificeerde berekeningen van *Morse-Smale* (MS) complexen, die corresponderen met de Morse-Smale gradiënt vectorvelden gedefinieerd op vlakke begrensde domeinen of op impliciete oppervlakken. Een Morse-Smale-complex is de configuratie van singuliere punten en separatrices van een Morse-Smale gradiënt vectorveld. Dit is een netachtige structuur op het oppervlak,

zoals weergegeven in figuur 1.4, die de globale topologie van de onderliggende vorm reflecteert. Hierdoor is het Morse-Smale complex een belangrijk hulpmiddel voor de globale topologische analyse van ingewikkelde vormen of data. Het probleem is om de gecertificeerde separatrices te berekenen die een zadelpunt verbinden met een put of een bron en welke de aantrekkende gebieden van een put scheiden van de afstotende gebieden van een bron van het gradiënt vectorveld. Dergelijke berekeningen vormen een grote uitdaging omdat de invoer een willekeurige complexiteit kan hebben terwijl de hoeveelheid beschikbare rekenkracht beperkt is. In dit proefschrift ontwikkelen we nieuwe technieken voor deze berekeningen. Figuur 1.4 toont een voorbeeld van gecertificeerd Morse-Smale complex corresponderend met de hoogtefunctie op een gladde *tangle-cube*.

Het proefschrift dat voor u ligt vormt een kleine stap voorwaarts naar een nieuwe wijze van gecertificeerde meetkundige berekening. Wij zijn ervan overtuigd dat de verschillende methoden van gecertificeerde berekeningen, behandeld in dit proefschrift, uitgebreid kunnen worden naar vele andere problemen in het veld.